Höhere Ableitungen impliziter Funktionen

Jörg Feldvoss
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fachbereich Maschinenbau
Holstenhofweg 85, D-22043 Hamburg
Germany

Seien U eine offene Untermenge von $\mathbb{R}^2$ und f eine Funktion von U in $\mathbb{R}$. Ist f partiell differenzierbar in einer Umgebung von (x, y) mit $(\mathrm{grad} f)(x, y) \neq 0$, so ist die durch $f(x, y) = 0$ implizit (auf einem Intervall I um x) gegebene Funktion

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y(x) \end{array} \right.$$

differenzierbar und mit der Hilfsfunktion

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, y(x)) \end{array} \right.$$

erhält man mit Hilfe der Kettenregel aus $f(g(x)) = 0$, dass

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 0$$

oder explizit:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ y'(x) \end{array} \right),$$

d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Setzt man $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ voraus (, was wir im folgenden o.B.d.A. immer tun wollen), so ergibt sich schließlich:

$$\boxed{\quad y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad .}$$

Ist nun f zweimal partiell differenzierbar in einer Umgebung von (x, y) mit $(\mathrm{grad} f)(x, y) \neq 0$, so ist die durch $f(x, y) = 0$ implizit (auf einem Intervall I um x) gegebene Funktion $y = y(x)$ zweimal differenzierbar. Die beiden Hilfsfunktionen

$$f_x : \begin{cases} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x} \end{cases}$$

und

$$f_y : \begin{cases} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

sind dann auch differenzierbar mit den folgenden (totalen) Ableitungen:

$$f'_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{pmatrix},$$

$$f'_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Aus

$$f_x(g(x)) + y' \cdot f_y(g(x)) = 0$$

folgt mit der Produkt- und Kettenregel, dass

$$f'_x(g(x)) \cdot g'(x) + y''(x) \cdot f_y(g(x)) + y'(x) \cdot f'_y(g(x)) = 0,$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} + y'' \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + y' \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot y' + y'' \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + y' \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Ist nun f zweimal stetig partiell differenzierbar, so lassen sich die partiellen Ableitungen nach x und y vertauschen, und man erhält

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y')^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y'' \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Auflösen nach y'' ergibt

$$y'' = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y' \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y')^2 \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

und Einsetzen des Ergebnisses für y' führt schließlich zu

$$\boxed{y'' = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3} \quad .}$$

Literatur

[1] Julian Lowell Coolidge: *A Treatise on Algebraic Plane Curves*, Dover Publications, Inc., New York, 1959